

# Esquemas de Volumes Finitos aplicados em Magnetohidrodinâmica Ideal via Octave

Raphael de O. Garcia\*, Samuel R. de Oliveira

\*Departamento de Matemática Aplicada, IMECC, Unicamp,  
13083-859, Campinas, SP

## Resumo

Nas últimas décadas, Métodos Numéricos de Volumes Finitos vêm sendo desenvolvidos, aprimorados e aplicados em sistemas de equações diferenciais parciais (EDP's) hiperbólicos não lineares dependentes do tempo [4]. As leis de conservações são escritas por sistemas de EDP's e a modelagem da maioria dos problemas em Ciências e/ou Engenharias parte de tais leis.

Em particular, um sistema que se destaca é o formado pelas equações de Magnetohidrodinâmica (MHD) que modelam o escoamento de um fluido magnetizado por possuir dificuldades e desafios referentes à obtenção de soluções numéricas [3, 6]. O caráter puramente não linear dessas equações possibilitam a formação dos três tipos de ondas elementares: ondas de choque, ondas de rarefação e ondas de contato, que aparecem como descontinuidades na solução das equações de MHD [7].

No que diz respeito a Métodos Numéricos, cada um possui suas próprias propriedades que influenciam diretamente na solução numérica tornando-os adequados ou não dependendo da aplicação em questão.

Neste trabalho são feitas comparações entre os métodos de volumes finitos aplicados às equações de Magnetohidrodinâmica, dada pelas seguintes expressões:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0 \quad (\text{equação da continuidade})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\mathbf{v} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}\mathbf{v}^T + \mathcal{P}) = 0 \quad (\text{equação do movimento})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{B}^T - \mathbf{B}\mathbf{v}^T) = 0 \quad (\text{equação de indução})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}E + \nabla \cdot (\rho E\mathbf{v} + \mathcal{P}\mathbf{v}) = 0 \quad (\text{equação da energia})$$

(1)

em que

$\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$	(densidade do fluido em escoamento)
$v = v(\mathbf{x}, t)$	(velocidade do fluido)
$\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbf{x}, t)$	(Tensor de pressão no fluido)
$B = B(\mathbf{x}, t)$	(campo magnético do fluido)
$E = E(\mathbf{x}, t)$	(energia total do fluido)
$\epsilon = \epsilon(\mathbf{x}, t)$	(energia interna do fluido)
$p = p(\mathbf{x}, t)$	(pressão do fluido)
$\gamma$	(calor específico do fluido)

com

$$E = \epsilon + \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + \frac{1}{8\pi\rho}|\mathbf{B}|^2 \quad \text{e} \quad \epsilon = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho}.$$

Os métodos numéricos Lax-Friedrichs, Nessyahu-Tadmor [5], Lax-Wendroff, Godunov, esquemas essencialmente não oscilatórios ponderados (WENO) com Runge-Kutta [2] e Runge-Kutta com Lax-Wendroff [1] foram implementados em *Octave* e comparados com relação ao tempo gasto de CPU, consumo de memória, quantidade de operações, oscilações e/ou dissipações numéricas, ordem de precisão e estabilidade. Assim, têm-se tabelas de comparações entre métodos que podem auxiliar na escolha de métodos numéricos para problemas similares. Além disso, gráficos e vídeos comparativos das soluções aproximadas do sistema (1) foram elaborados com o mesmo intuito.

Consequentemente, o trabalho explorou o uso do *Octave* - ambiente Linux/GNU - em questões de análise numérica relevantes ao uso de métodos numéricos de volumes finitos aplicados na obtenção de soluções aproximadas para as equações de Magnetohidrodinâmica Ideal.

## Referências

- [1] W. Hundsdorfer, J. G. Verwer, “Numerical Solution of Time-Dependent Advection-Diffusion-Reaction Equations”, Springer, New York, 2003.
- [2] G. -S. Jiang, C. -W. Shu, Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes, *Journal of Computational Physics*, 126 (1996) 202-228.
- [3] R. J. Leveque, “Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems”, Cambridge University Press, United States of America, 2006.
- [4] J. D. Logan, “An Introduction to Nonlinear Partial Differential Equations”, John Wiley & Sons, New Jersey, 2008.
- [5] H. Nessyahu, E. Tadmor, Non-Oscillatory Central Differencing for Hyperbolic Conservation Laws, *Journal Computational Physics*, 87, n. 2 (1990) 408-463.
- [6] E. F. Toro, “Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics - A Practical Introduction”, Springer, Germany, 1999.
- [7] M. Wesenberg, “Efficient Finite - Volume Schemes for Magnetohydrodynamic Simulations in Solar Physics, *thesis*, 2003.