Sobre Uma Condição de Finitude para Subgrupo Verbal com Respeito à Palavra de Engel

Kaliana dos Santos Dias de Freitas*

*Departamento de Matemática, Universidade de Brasília - UNB, Orientador: Pavel Shumyatsky

Resumo

Seja F um grupo livre sobre o conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, cujos elementos chamamos de variáveis, uma palavra é um expressão da forma

$$w(x_1, x_2, \ldots, x_k) = x_{i_1}^{\epsilon_1}.x_{i_2}^{\epsilon_2} \ldots x_{i_s}^{\epsilon_s},$$

onde $i_1, i_2, \ldots, i_s \in \{1, \ldots, k\}$ e cada ϵ_j é ± 1. Em um grupo G, a palavra pode ser vista como uma aplicação de $G \times \ldots \times G$ com k fatores, onde substituimos as variáveis pelos elementos do grupo. Ao elemento $w(g_1, \ldots, g_k)$, onde $g_1, \ldots, g_k$ são elementos de G, chamamos de w-valor de G. O subgrupo verbal $w(G)$ é o subgrupo gerado pelo conjunto G_w consistindo de todos os w-valores de G. Se o subgrupo verbal $w(G)$ for finito sempre que o conjunto gerador G_w for finito dizemos que a palavra w é concisa. Para x, y em G definimos $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}x^y$, o comutador de x e y. Em [4] foi mencionada a conjectura de P. Hall sobre toda palavra ser concisa e sua prova para uma palavra não comutador, que é a palavra cuja soma dos expoentes resulta em um valor diferente de zero, as palavras derivadas δ_k e a central inferior γ_k definidas por $\gamma_1 = \delta_0 = x$, $\delta_{k+1} = [\delta_k, \gamma_1]$ e $\delta_{k+1} = [\delta_k, \delta_k]$ também foram provadas serem concisas e, mais tarde, Jeremy Wilson [5] estendeu este resultado para todas as palavras comutadores multilineares (que são as palavras construídas por agrupar os comutadores sempre usando variáveis diferentes).

O problema de P.Hall tem solução positiva para grupos periódicos, pois se w é uma aplicação finita em G o subgrupo $w(G)$ é finito se, e só se, todos os valores de w em G são de ordem finita. Enquanto que para grupos livres de torsão o problema resume-se a

provar se $w \equiv 1$ quando w é aplicação finita. Nesta direção, Ivanov [2] prova que existe um grupo livre de torsão G com centro cíclico cujo grupo-fator central é um grupo infinito, tal que a palavra $v(x,y) = [[x^{p^n}, y^{p^n}]^n, y^{p^n}]^n$ possui somente dois valores em G e o valor não trivial é gerador do centro.

A palavra n-ésima de Engel $[x,\, _n\, y]$ pode ser identificada com os elementos de F e definida indutivamente por $[x,\, _0\, y] = x$; $[x,\, _n\, y] = [[x,\, _{n-1}\, y], y]$, para todos inteiros positivos n, n é dito comprimento da palavra, e denotamos por $e_n(G) = \{[g,\, _n\, h] \mid g, h \in G\}$ o conjunto de todos e_k-valores de Engel de G. O subgrupo verbal gerado por $e_n(G)$ é chamado de n-ésimo subgrupo verbal de Engel de G e denotamos aqui por $E_n(G)$. Note que, a palavra de Engel não é comutador multilinear se $n > 1$, pois as variáveis y ocorrem mais que uma vez, e o problema de determinar sua concisão está ainda aberto.

Nesta direção de impor certas condições ao conjunto G_w e verificar em que isso influencia a estrutura do subgrupo $w(G)$, em [1] Rogério e Shumyatsky apresentaram o seguinte resultado:

Teorema 1 *Seja k um inteiro positivo e G um grupo em que todos os δ_k-comutadores estão contidos em uma união de número finito de subgrupos de Chernikov. Então $G^{(k)}$ é Chernikov.*

E de modo similiar, estabilizaram o seguinte teorema:

Teorema 2 *Seja k um inteiro positivo e G um grupo em que todos os γ_k-comutadores estão contidos em uma união de número finito de subgrupos de Chernikov. Então $\gamma_k(G)$ é Chernikov.*

Neste sentido, onde w é a palavra de Engel, lidaremos com o seguinte resultado:

Teorema 3 *Seja k um inteiro positivo e G um grupo em que todos os e_k-valores de G estão contidos em uma união finita de subgrupos de Chernikov. Então $E_k(G)$ é Chernikov.*

Este Teorema foi resolvido para os casos em que G é um grupo nilpotente, solúvel e de m-Engel. Serão apresentados os Lemas que foram pensados para a prova do Teorema no caso geral, onde G é um grupo arbitrário qualquer.

Referências

[1] J. R. Rogério, P. Shumyatsky, A Finiteness Condition for Verbal Subgroups, J. Group Theory, 10 (2007) 811-815.

[2] S. V. Ivanov, P.Hall's Conjecture on the Finiteness of Verbal Subgroups, Soviet Math.(Iz. VUZ), 33 (1989), 59-70.

[3] R. F. Turner-Smith, Finiteness Conditions for Verbal Subgrups, J.London Math. Soc., 41 (1966), 166-176.

[4] R. F. Turner-Smith, Marginal Subgroups Properties for Outer Commutators Words, Proc .London Math., 14 (1964), 321-341.

[5] J. Wilson, On Outer-Commutators Words, Canadian J. Math, 26 (1974), 608-620.