I Congresso Brasileiro de
Jovens Pesquisadores em
Matemática Pura e Aplicada

# Métodos Numéricos Rigorosos para EDPs

Marcio Gameiro*

*Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação,
Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brazil.

**Resumo**

Apresentamos um método numérico para calcular rigorosamente (provar a existência de) soluções de EDPs. O método apresentado, chamado de *Continuação Rigorosa* (ver [1, 2, 3, 4]), é um método para calcular curvas de soluções de EDPs que dependem de um parâmetro. Combinando soluções numéricas obtidas a partir do método previsor-corretor com cálculos rigorosos usando aritmética intervalar e estimativas analíticas, este método numérico rigoroso verifica que a solução calculada numericamente pode ser usada para definir explicitamente um conjunto que contém uma única solução do problema original.

A filosofia do método pode ser descrita, em linhas gerais, como segue. Para provar, de uma maneira construtiva, assistida pelo computador, a existência de uma solução específica (por exemplo uma solução de equilíbrio, uma órbita periódica, uma órbita heteroclínica, etc.) para uma equação diferencial não linear, primeiramente escrevemos o problema como

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

onde $f : X \to W$ é um operador não linear, $X$ e $W$ são espaços de Banach e as soluções $x$ de (1) correspondem às soluções procuradas da equação diferencial.

A segunda etapa é encontrar uma solução aproximada $\bar{x} \in X$ de (1). Se o espaço de Banach $X$ tem dimensão finita, isto pode ser feito por meio de um método iterativo como o método de Newton, enquanto que se $X$ é um espaço de dimensão infinita, a mesma abordagem pode ser aplicada à uma projeção finita de $f$. A terceira etapa consiste na construção de um operador não linear $T : X \to X$ que satisfaça duas propriedades. Primeiro, deve ser definido de forma que os zeros de $f$ estejam em correspondência um a um com os pontos fixos de $T$, isto é, $f(x) = 0$ se, e somente se, $T(x) = x$. Segundo, $T$ deve ser construído de forma que possa ser uma contração perto da solução numérica $\bar{x}$. Em particular, $T$ pode ser construído como um

operador do tipo Newton em torno da aproximação numérica $\bar{x}$. A etapa final e mais elaborada tem por objetivo procurar a existência de um conjunto $B \subset X$ centrado em $\bar{x}$ que contenha um zero do operador não linear $f$. A idéia da realização de tal tarefa é encontrar $B \subset X$ tal que $T : B \to B$ seja uma contração, e então usar o Teorema do Ponto Fixo de Banach para concluir a existência de um único ponto fixo de $T$ em $B$.

Apresentamos aplicações para provar a existência de soluções de equilíbrio e soluções periódicas de algumas EDPs definidas em domínios de dimensão dois e três.

# Referências


[1] Marcio Gameiro, and Jean-Philippe Lessard; *Analytic estimates and rigorous continuation for equilibria of higher-dimensional PDEs*, Journal of Differential Equations, 249, no. 9, pp. 2237-2268, (2010).

[2] Marcio Gameiro, and Jean-Philippe Lessard; *Rigorous computation of smooth branches of equilibria for the three dimensional Cahn-Hilliard equation*, Numerische Mathematik, 117, no. 4, pp. 753-778, (2011).

[3] Marcio Gameiro, and Jean-Philippe Lessard; *Efficient rigorous numerics for high-dimensional PDEs via onedimensional estimates*, SIAM J. Numer. Anal., (2013).

[4] Marcio Gameiro, Jean-Philippe Lessard, and Alessandro Pugliese; *Computation of smooth manifolds of solutions of PDEs via rigorous multi-parameter continuation*, Foundations of Computational Mathematics, (2014).