Estimativas para n-Larguras de Conjuntos de Funções Suaves sobre o Toro $\mathbb{T}^d$

Régis L. B. Stábile*, Sérgio A. Tozoni**

*Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - Campus Birigui
E-mail: registabile@ifsp.edu.br
**Universidade Estadual de Campinas - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
E-mail: tozoni@ime.unicamp.br

Resumo

A teoria de n-Larguras foi introduzida por Kolmogorov em meados da década de 1930. Desde então, muitos trabalhos têm visado obter estimativas assintóticas para n-larguras de Kolmogorov de diferentes classes de conjuntos.

Seja A um subconjunto fechado, convexo e centralmente simétrico de um espaço de Banach X. Definimos a n-largura de Kolmogorov de A em X por

$$d_n(A, X) = \inf_{X_n} \sup_{x \in A} \inf_{y \in X_n} \|x - y\|_X,$$

onde o ínfimo é tomado sobre todos os espaços n-dimensionais X_n de X. Se Y é um outro espaço de Banach e $T : X \longrightarrow Y$ um operador limitado, definimos a n-largura de Kolmogorov do operador T por $d_n(T) = d_n(T(B_X), Y)$, onde B_X denota a bola unitária fechada do espaço X.

Propomos com este trabalho, investigar n-larguras de Kolmogorov de operadores multiplicadores do tipo $\Lambda = \{\lambda_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ e $\Lambda_* = \{\lambda^*_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$, $\Lambda, \Lambda_* : L^p(\mathbb{T}^d) \to L^q(\mathbb{T}^d)$ sobre o toro d-dimensional real $\mathbb{T}^d$, onde $\lambda_{\mathbf{k}} = \lambda(|\mathbf{k}|)$ e $\lambda^*_{\mathbf{k}} = \lambda(|\mathbf{k}|_*)$ para uma função λ definida no intervalo $[0, \infty)$, com $|\mathbf{k}| = \left(k_1^2 + \cdots + k_d^2\right)^{1/2}$ e $|\mathbf{k}|_* = \max_{1\le j\le d}|k_j|$.

Na primeira parte, estabelecemos estimativas inferiores e superiores para n-larguras de operadores multiplicadores gerais. Na segunda parte, aplicamos tais resultados para os operadores multiplicadores específicos

$\Lambda^{(1)} = \left\{|\mathbf{k}|^{-\gamma}(\ln|\mathbf{k}|)^{-\xi}\right\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$, $\Lambda^{(1)}_* = \left\{|\mathbf{k}|_*^{-\gamma}(\ln|\mathbf{k}|_*)^{-\xi}\right\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$,

$\Lambda^{(2)} = \left\{e^{-\gamma|\mathbf{k}|^r}\right\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ e $\Lambda_*^{(2)} = \left\{e^{-\gamma|\mathbf{k}|_*^r}\right\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$, com $\gamma, r > 0$ e $\xi \geq 0$.

Temos que $\Lambda^{(1)}U_p$ e $\Lambda_*^{(1)}U_p$ são conjuntos de funções finitamente diferenciáveis em $\mathbb{T}^d$, em particular, $\Lambda^{(1)}U_p$ e $\Lambda_*^{(1)}U_p$ são classes do tipo Sobolev se $\xi = 0$, já $\Lambda^{(2)}U_p$ e $\Lambda_*^{(2)}U_p$ são conjuntos de funções infinitamente diferenciáves ($0 < r < 1$), analíticas ($r = 1$) ou inteiras ($r > 1$) em $\mathbb{T}^d$, onde U_p denota a bola unitária fechada de $L^p(\mathbb{T}^d)$. Em particular, demonstramos que as estimativas para as n-larguras de Kolmogorov $d_n(\Lambda^{(1)}U_p, L^q(\mathbb{T}^d))$, $d_n(\Lambda_*^{(1)}U_p, L^q(\mathbb{T}^d))$, $d_n(\Lambda^{(2)}U_p, L^q(\mathbb{T}^d))$ e $d_n(\Lambda_*^{(2)}U_p, L^q(\mathbb{T}^d))$ são exatas em termos de ordem em diversas situações.

Referências

[1] Grafakos, L, *Classical Fourier Analysis*, Springer, second edition, 2008.

[2] Kushpel, A., Stábile, R. L. B., Tozoni, S., Estimates for n-widths of sets of smooth functions on the torus $\mathbb{T}^d$, *J. Approx. Theory* **183** (2014), 45-71.

[3] Pinkus, A., *n-Widths in Approximation Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.