I Congresso Brasileiro de
Jovens Pesquisadores em
Matemática Pura e Aplicada

Esquemas de Volumes Finitos aplicados em Magnetohidrodinâmica Ideal via Octave

Raphael de O. Garcia*, Samuel R. de Oliveira

*Departamento de Matemática Aplicada, IMECC, Unicamp, 13083-859, Campinas, SP

Resumo

Nas últimas décadas, Métodos Numéricos de Volumes Finitos vêm sendo desenvolvidos, aprimorados e aplicados em sistemas de equações diferenciais parciais (EDP's) hiperbólicos não lineares dependentes do tempo [4]. As leis de conservações são escritas por sistemas de EDP's e a modelagem da maioria dos problemas em Ciências e/ou Engenharias parte de tais leis.

Em particular, um sistema que se destaca é o formado pelas equações de Magnetohidrodinâmica (MHD) que modelam o escoamento de um fluido magnetizado por possuir dificuldades e desafios referentes à obtenção de soluções numéricas [3, 6]. O caráter puramente não linear dessas equações possibilitam a formação dos três tipos de ondas elementares: ondas de choque, ondas de rarefação e ondas de contato, que aparecem como descontinuidades na solução das equações de MHD [7].

No que diz respeito a Métodos Numéricos, cada um possui suas próprias propriedades que influenciam diretamente na solução numérica tornando-os adequados ou não dependendo da aplicação em questão.

Neste trabalho são feitas comparações entre os métodos de volumes finitos aplicados às equações de Magnetohidrodinâmica, dada pelas seguintes expressões:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 && \text{(equação da continuidade)}\\
&\frac{\partial}{\partial t}\rho \mathbf{v} + \nabla \cdot \left(\rho \mathbf{v}\mathbf{v}^T + \mathcal{P}\right) = 0 && \text{(equação do movimento)}\\
&\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} + \nabla \cdot \left(\mathbf{v}\mathbf{B}^T - \mathbf{B}\mathbf{v}^T\right) = 0 && \text{(equação de indução)}\\
&\frac{\partial}{\partial t}E + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{v} + \mathcal{P}\mathbf{v}) = 0 && \text{(equação da energia)}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

em que

$$
\begin{array}{ll}
\rho = \rho(\mathbf{x}, t) & \text{(densidade do fluido em escoamento)}\\
v = v(\mathbf{x}, t) & \text{(velocidade do fluido)}\\
\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbf{x}, t) & \text{(Tensor de pressão no fluido)}\\
B = B(\mathbf{x}, t) & \text{(campo magnético do fluido)}\\
E = E(\mathbf{x}, t) & \text{(energia total do fluido)}\\
\epsilon = \epsilon(\mathbf{x}, t) & \text{(energia interna do fluido)}\\
p = p(\mathbf{x}, t) & \text{(pressão do fluido)}\\
\gamma & \text{(calor específico do fluido)}
\end{array}
$$

com

$$
E = \epsilon + \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + \frac{1}{8\pi\rho}|\mathbf{B}|^2 \quad \text{e} \quad \epsilon = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho}\ .
$$

Os métodos numéricos Lax-Friedrichs, Nessyahu-Tadmor [5], Lax-Wendroff, Godunov, esquemas essencialmente não oscilatórios ponderados (WENO) com Runge-Kutta [2] e Runge-Kutta com Lax-Wendroff [1] foram implementados em *Octave* e comparados com relação ao tempo gasto de CPU, consumo de memória, quantidade de operações, oscilações e/ou dissipações numéricas, ordem de precisão e estabilidade. Assim, têm-se tabelas de comparações entre métodos que podem auxiliar na escolha de métodos numéricos para problemas similares. Além disso, gráficos e vídeos comparativos das soluções aproximadas do sistema (1) foram elaborados com o mesmo intuito.

Consequentemente, o trabalho explorou o uso do *Octave* - ambiente Linux/GNU - em questões de análise numérica relevantes ao uso de métodos numéricos de volumes finitos aplicados na obtenção de soluções aproximadas para as equações de Magnetohidrodinâmica Ideal.

Referências

[1] W. Hundsdorfer, J. G. Verwer, “Numerical Solution of Time-Dependent Advection-Diffusion-Rection Equations”, Springer, New York, 2003.

[2] G. -S. Jiang, C. -W. Shu, Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes, *Journal of Computational Physics*, 126 (1996) 202-228.

[3] R. J. Leveque, “Finite Volume Methods for Hyberbolic Problems”, Cambridge University Press, United States of America, 2006.

[4] J. D. Logan, “An Introduction to Nonlinear Partial Differential Equations”, John Wiley & Sons, New Jersey, 2008.

[5] H. Nessyahu, E. Tadmor, Non-Oscillatory Central Differencing for Hyperbolic Conservation Laws, *Journal Computational Physics*, 87, n. 2 (1990) 408-463.

[6] E. F. Toro, “Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics - A Practical Introduction”, Springer, Germany, 1999.

[7] M. Wesenberg, “Efficient Finite - Volume Schemes for Magnetohydrodynamic Simutations in Solar Physics, *thesis*, 2003.